Le sujet que vous avez failli avoir

Exercice 1.

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$:

a. $x^2 = \bar{0}$

b. $3\bar{x} = \overline{11}$

Exercice 2.

Dans ($\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$,+)

Déterminer les ordres des éléments: $\bar{7}$, $\overline{40}$

Exercice 3.

On considère le groupe multiplicatif $(R_{100}, .)$

a. Nombre d'éléments de R_{100}

b. L'une des deux propositions suivantes est vraie

« $\forall x \in R_{100}, x^{40} = \bar{1}$ »

« $\forall x \in R_{100}, x^{99} = \bar{1}$ »

Justifier celle qui est vraie.

c. Soit l'application f de R_{100} vers R_{100} définie comme suit: $\forall x \in R_{100}$, f(x)=x^{27}, exprimez l'application f^{-1}.

Exercice 4.

On considère le corps $(F_2, +, .)$ et l'anneau de polynômes $(F_2[X], +, .)$.

a. Déterminer le pgcd des deux polynômes A(X)=$X^3 + X^2 + X + 1$ et B(X)=$X^3 + X + 1$

(attention: on calcule dans $F_2[X]$).

b. Montrer que le polynôme B(X) est irréductible dans $F_2[X]$.

c. Soit alors le corps K=$(F_2[X]/B(X), +, .)$

Déterminer le nombre d'éléments de K et leur liste (on désignera la classe de X par ω)

Montrer que chacun des éléments de K*=K$\setminus\{0\}$ peut s'écrire à la fois comme une puissance de ω et comme une combinaison linéaire de puissances de ω

d. Exprimer ω^{-1} comme une combinaison linéaire de puissances de ω.